# Eine Kennzeichnung der symmetrischen Projektivbewegungen

Ruas, Afrânio Figueirede
Tölke, Jürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980, S.143-147

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

# Eine Kennzeichnung der symmetrischen Projektivbewegungen

Von **Afrânio F. Ruas** und **Jürgen Tölke,** Salvador

Vorgelegt von H. R. Müller

(Eingegangen am 14. 8. 1979)

**1.** In [14] wurde gezeigt, daß der Wendekreis – eines ebenen Zwanglaufs – genau dann mit dem Ortskreis der Brennpunkte der die Gangpolbahn im Pol oskulierenden Parabel [7, 9] zusammenfällt, wenn eine symmetrische Rollung [1] vorliegt. Dies hat zur Folge, daß wenn es bei einer symmetrischen Rollung nur auf das Bahnkrümmungsfeld ankommt, man ein in zweiter Ordnung approximierendes symmetrisches Schleifschiebergetriebe heranziehen kann.

Da ein entsprechender Sachverhalt auch für die sphärische Kinematik zutrifft, kann man sich fragen, ob diese Eigenschaft bereits *projektiver* Natur ist. Wir zeigen, daß dies in der Tat für reguläre Projektivbewegungen mit drei reellen Momentanpolen [11] zutrifft. Dies hat direkte Konsequenzen für Unterscharen, zum Beispiel für die symmetrischen Affinrollungen [15].

Wegen der Realität der Polkonfiguration schließen unsere Betrachtungen den hyperbolischen Fall nicht (unmittelbar) ein. Wir zeigen diesbezüglich abschließend: Die hyperbolischen symmetrischen Rollungen sind dadurch gekennzeichnet, daß der Pseudobrennpunkt einer die Gangpolbahn im Pol oskulierenden Pseudoparabel ständig auf dem Pseudowendekegelschnitt liegt.

**2.** Nach H. FRANK [4] gibt es in erster Differentiationsordnung sechs verschiedene Typen ebener Projektivbewegungen. Wir legen im Folgenden jenen Typ zugrunde, bei dem an jeder Parameterstelle drei linear unabhängige reelle Pole $P_j$ $(j = 1, 2, 3)$ existieren, und sprechen von *projektiven Bewegungen* $\beta(t)$. Für eine ausführliche Behandlung und Darstellung verweisen wir auf [11].

Gelten für die *Rastpolbahnen* Ableitungsgleichungen der Form

$$\dot{p}_i(t) = \beta_i^j(t) p_j(t), \quad \beta_i^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

so wird die durch

$$x(t) := x^i(t) p_i(t)$$

gegebene Bahnkurve [4, 11] durch das Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \varrho x + \mathring{x} \quad \text{mit} \quad \mathring{x} := \sigma_{(i)} x^i p_i \tag{2}$$

erfaßt, worin $\sigma_i = \sigma_i(t)$ die *Eigenwerte* der in Normalform angenommenen *infinitesimalen Abbildungsmatrix* bezeichnet.

**3.** Für die Projektivbewegungen $\beta(t)$ lassen sich – in gewisser Analogie zum Affinen [10, 12] – *zwei* wesentlich verschiedene *Krümmungstheorien* entwickeln, welche genau für die pseudoeuklidische Kinematik äquivalent sind. Ist $S_j(t,x)$ der die Bahnkurve $x(t)$ oskulierende Kegelschnitt durch die Momentanpole $P_i, P_k$ – also der (kinematische) *j-Schmiegkegelschnitt* –, so heißt der Pol $M_j(t,x)$ der momentanen Fixgeraden $P_iP_k$ am Kegelschnitt $S_j(t,x)$ der *j-Krümmungsmittelpunkt 1. Art.* Der Hüllpunkt des Polstrahls $P_jX$ heißt der *j-Krümmungsmittelpunkt 2. Art.*

Betrachten wir die Punkte der momentanen Fixgeraden $P_iP_k$. Ihre j-Krümmungsmittelpunkte 2. Art liegen auf einem, durch die Pole gehenden, Kegelschnitt – dem *j-Rückkehrkegelschnitt* $R_j(t,x)$ mit der Darstellung ($j \neq i < k \neq j$)

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Det}(\mathring{x},p_j,x) - (-1)^j \operatorname{Det}(x,p_i,p_k)\operatorname{Det}(\dot{p}_j,p_j,x) = 0.$$

Für die Bedeutung dieser Kegelschnitte und ihre Beziehung zur *Rückkehrpunktskurve* [4] sei auf [11] verwiesen.

**4.** Wir betrachten *j-reguläre* Projektivbewegungen $\beta(t)$, für die definitionsgemäß

$$\operatorname{Det}(p_j,\dot{p}_j,p_i) \neq 0 \quad \text{für alle} \quad i \neq j$$

gilt. Bezeichnet $N_j$ den durch[1])

$$DV(P_iP_k; \dot{P}_jN_j) = -1, \quad j \neq i \neq k \neq j$$

definierten *j-Normalpunkt,* so heißt die j-reguläre Projektivbewegung $\beta(t)$ eine (projektive) $S^{(m_j)}$-Bewegung[2]), wenn das Doppelverhältnis

$$\text{(4)} \qquad m_j := DV(P_jN_j; M_{\bar{P}_j}M_{P_j}) \quad (\neq 1)$$

konstant ist. Hierbei bezeichnet $M_{P_j}$ bzw. $M_{\bar{P}_j}$ den (analog wie bei den Bahnkurven gebildeten) Krümmungsmittelpunkt 1. Art der Rastpolkurve $p_j(t)$ bzw. Gangpolkurve $\bar{p}_j(t)$. Mit den Abkürzungen ($j \neq i \; k \neq j$)

$$\Delta_j := \dot{\beta}^i_j\beta^k_j - \dot{\beta}^k_j\beta^i_j - \beta^i_j\beta^i_j\beta^k_{(i)} + \beta^k_j\beta^k_j\beta^i_{(k)}$$

ergibt sich mit (4) die Beziehung [11]

$$\Delta_j = -\frac{m_j}{1-m_j}(\sigma_{(i)} - \sigma_{(k)})\,\beta^i_j\beta^k_j.$$

Die $S^{(m_j)}$-Bewegungen verallgemeinern die aus dem Euklidischen bekannten *$S^{(m)}$-Bewegungen* [13], welche ihrerseits als Verallgemeinerungen der Trochoidenbewegungen bzw. der symmetrischen Rollungen ($m = -1$) [1, 3, 14] auffaßbar sind. Für Einzelheiten sei wieder auf [11] verwiesen.

**5.** Demgemäß sprechen wir im Falle $m_j = -1$ von den *j-symmetrischen Projektivbewegungen,* wofür in [11] einige Kennzeichnungen bewiesen wurden. Vielleicht ist es nützlich, einige Bemerkungen zur euklidischen Sachlage [14] einzuschieben.

O. BOTTEMA [3] hat 1972 nach Vorarbeiten von R. BEREIS [1] und J. TÖLKE [13] gezeigt: Ein Zwanglauf ist genau dann eine symmetrische Rollung,

---

[1]) Wir normieren im Folgenden die Darstellung von $N_i$ gemäß: $\operatorname{Det}(p_i,p_{i+2},n_{i+2}) = \beta^{i+1}_{i+2} \operatorname{Det}(p_1,p_2,p_3)$.

[2]) Diese Bezeichnungsweise erscheint uns günstiger als die in [11]. Dort wurden diese Bewegungen mit $S_j^{(m)}$ bezeichnet.

wenn die Brennpunkte sämtlicher die Gangpolbahn im Pol hyperoskulierender Kegelschnitte beständig auf der Kreispunktkurve liegen.

In Analogie hierzu haben wir kürzlich gezeigt [14]: Ein Zwanglauf ist genau dann eine symmetrische Rollung, wenn der Brennpunkt einer die Gangpolbahn im Pol *oskulierenden* Parabel beständig auf dem Wendekreis liegt[3]).

Wir wollen diesen Sachverhalt aufgreifen und uns fragen, ob etwas analoges auch für die j-symmetrischen Projektivbewegungen gilt. Im bejahenden Falle hätte dies unmittelbare Konsequenzen für Unterscharen, also z.B. für die (hyperbolischen) symmetrischen Affinrollungen [15].

**6.** Bestimmen wir demgemäß die die Rastpolbahn P oskulierenden Kegelschnitte. Mit $m_j = m_j(t) \neq 1$ haben wir nach [11] ($j \neq i < k \neq j$)

$$\ddot{p}_j = \beta_j^i \beta_1^{(j)} p_j + e_j \dot{p}_j + (-1)^j \frac{m_j}{2(1-m_j)} (\sigma_i - \sigma_k)\, n_j, \tag{5}$$

wobei $e_j = e_j(t)$ eine „willkürliche" Parameterfunktion ist und $m_j$ gemäß (4) definiert ist. Im lokalen Koordinatensystem $(p_j, \dot{p}_j, n_j)$ ergibt sich für das in Rede stehende Kegelschnittnetz (a, b sind Scharparameter)

$$-\frac{(-1)^j m_j}{2(1-m_j)} (\sigma_i - \sigma_k) x^2 x^2 + a x^3 x^3 + 2b x^2 x^3 + 2 x^1 x^3 = 0.$$

Die *Pseudoparabeln* dieses Netzes berühren definitionsgemäß die momentane Fixgerade $P_i P_k$. Für die zugehörigen Scharparameter gilt daher die Beziehung

$$b^2 = -(-1)^j \frac{m_j}{2(1-m_j)} (\sigma_i - \sigma_k)\, a.$$

Analog zu [11] nennen wir den nicht auf der Pseudoparabel $P^j(b,t)$ gelegenen Schnittpunkt $F_j$ seiner durch die Pole $P_i, P_k$ gehenden Tangenten den *j-Projektivbrennpunkt.* Da die Pole $P_i, P_k$ die Darstellung $(0,1,1)$ bzw. $(0,1,-1)$ besitzen, liefert eine kurze Zwischenrechnung für den j-Projektivbrennpunkt die Darstellung

$$f_j = -\frac{1}{2}\left(4b^2 - \left(\frac{m_j}{1-m_j}\right)^2 (\sigma_i - \sigma_k)^2\right) p_j + b \dot{p}_j - (-1)^j \frac{m_j}{2(1-m_j)} (\sigma_i - \sigma_k)\, n_j. \tag{7}$$

Dabei wurden jene Parabeln, die *keinen* Brennpunkt besitzen, außer Betracht gelassen. Dies ist genau für

$$4b^2 = \left(\frac{m_j}{1-m_j}\right)^2 (\sigma_i - \sigma_k)^2$$

der Fall. Kürzen wir nunmehr die linke Seite von (3) mit $R_j(t,x)$ ab, so liefert (7) die Beziehung

$$R_j(t, f_j) = (-1)^j \beta_j^{(i)} \beta_j^{(k)} (\sigma_i - \sigma_k) \left\{ b^2 - \left(\frac{m_j(\sigma_i - \sigma_k)}{2(1-m_j)}\right)^2 \right\} \frac{1+m_j}{1-m_j},$$

d.h.: *Eine j-reguläre Projektivbewegung ist genau dann eine j-symmetrische Projektivbewegung, wenn der (als existent vorausgesetzte) j-Projektivbrennpunkt einer die j-Rastpolbahn im Pol oskulierenden Pseudoparabel beständig auf dem j-Rückkehrkegelschnitt liegt.*

[3]) Der Wendekreis ist dann identisch mit dem Kreis von F. LAURENTI [7, 9].

Wie im Euklidischen fällt also der von den j-Projektivbrennpunkten (7) bestimmte Kegelschnitt (im lokalen System $(p_j, \dot{p}_j, p_j)$)

$$x^1x^3 = (-1)^j \frac{m_j}{1-m_j} (\sigma_i - \sigma_k)(x^2x^2 - x^3x^3)$$

genau für die j-symmetrischen Projektivbewegungen mit dem j-Rückkehrkegelschnitt zusammen.

**7.** Auf die Konsequenzen für Unterscharen wurde bereits hingewiesen. Da die *hyperbolischen Bewegungen* [2, 5–7, 16, 17] hier (wegen der vorausgesetzten Realität der Momentanpole) nicht unmittelbar erfaßt werden, soll abschließend kurz darauf eingegangen werden. Übrigens ist zu vermuten, daß ein analoger Sachverhalt generell für jene Projektivbewegungen gilt, bei denen zwei oder drei linear unabhängigen Momentanpole konjugiert komplex sind.

Um die Note nicht über Gebühr auszudehnen, schließen wir direkt an die Arbeit [17] an. Statt der Rastpolbahn wählen wir jetzt also die *Gangpolbahn* $\bar{q}_0$. Mit [17, (4.2)] folgt dann für das die Gangpolbahn im Pol oskulierende Kegelschnittnetz

$$-\bar{\varkappa}\,\bar{x}^1\bar{x}^1 + a\bar{x}^2\bar{x}^2 + 2\bar{x}^0\bar{x}^2 + 2b\bar{x}^1\bar{x}^2 = 0.$$

Die hierin enthaltenen Pseudoparabeln ergeben sich für $b^2 = -a\bar{\varkappa}$. Ihre Pseudobrennpunkte [17, S. 146] bestimmen sich damit zu

$$f = -2(b^2 + \bar{\varkappa}^2)\bar{q}_0 + b\bar{q}_1 - \bar{\varkappa}\bar{q}_2,$$

so daß mit [17, (4.1)] folgt: *Die hyperbolischen symmetrischen Rollungen sind dadurch gekennzeichnet, daß der Pseudobrennpunkt jeder die Gangpolbahn im Pol oskulierenden Pseudoparabel ständig auf dem Pseudowendekegelschnitt liegt.*

## Literatur


[1] BEREIS, R.: Über die symmetrische Rollung, Österr. Ing. Arch. **7** (1953), 243–246.

[2] BOL, G.: Hyperbolische Kinematik. Unveröffentlichtes Skript.

[3] BOTTEMA, O.: Characteristic properties of the symmetric plane motion, Kon. Ned. Akad. Wet. ser. B **75** (1972), 145–151.

[4] FRANK, H.: Ebene projektive Kinematik. Diss. Karlsruhe 1968.

[5] FRANK, H.: Zur ebenen hyperbolischen Kinematik, El. Math. **26** (1971), 121–131.

[6] GARNIER, R.: Cours de Cinematique. Tome III, Paris 1951.

[7] KALLENBERG, G. W. M.: Plane hyperbolic differential geometry, Nieuw. Arch. Wisk. **9** (1961), 1–15.

[8] KICKINGER, W.: Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über Parablen mit gemeinsamen Krümmungselement, El. Math. **18** (1963), 28–29.

[9] LAURENTI, F.: Sopra una proprieta dell'ipocioloide trcuspidata, Periodico Mat. IV ser. **38** (1966), 155–158.

[10] MÜLLER, H. R.: Die Formel von Euler-Savary in der affinen Kinematik, Arch. Math. **10** (1959), 71–80.

[11] TÖLKE, J.: Ebene projektive Kinematik, Math. Nachr. **63** (1974), 167–185, 187–196; **68** (1975), 221–237.

[12] TÖLKE, J.: Affine ebene Kinematik, Diss. Karlsruhe 1967.

[13] TÖLKE, J.: Spezielle Bewegungsvorgänge I, II, Arch. Math. **21** (1970), 429–436, 550 bis 556.
[14] TÖLKE, J.: Ebene euklidische und sphärische symmetrische Rollungen, Mech. Mach. Theory **13** (1978), 187–198.
[15] TÖLKE, J.: Eine affine Verallgemeinerung eines globalen Satzes von J. Steiner, Abh. Braunschw. Wiss. Gesellschaft. Im Druck.
[16] TÖLKE, J.: Kinematik der hyperbolischen Ebene I, III, Journ. r. a. Math. **265** (1974), 145–153; **273** (1975), 99–108.
[17] TÖLKE, J.: Kinematik der hyperbolischen Ebene II, Journ. r. a. Math. **267** (1974), 143 bis 150.